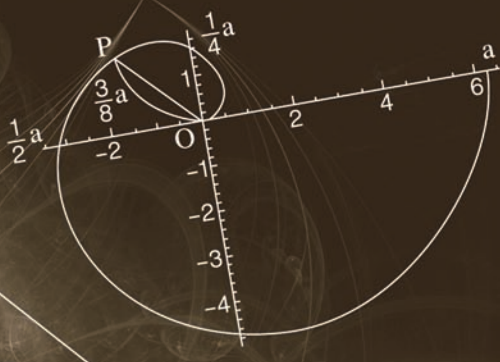
数学難問
BEST
100

แนะนำสำหรับ
- ✓อุดมศึกษา
- ✓มัธยมปลาย
- มัธยมต้น

100 โจทย์คณิต
สุดหินในประวัติศาสตร์



จาก**โจทย์ยากในตำนาน**ของบรรดานักคณิตศาสตร์ระดับโลก
สู่การหาคำตอบอย่างเรียบง่าย ที่ใช้เพียง**ความรู้ระดับมัธยมต้น !!**

สำนักพิมพ์ ส.ส.ท.
สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย-ญี่ปุ่น)

by Hirokazu Onoda
แปลโดย ดร.อรรณพ เรืองวิเศษ

100 โจทย์คณิตสุดหินในประวัติศาสตร์

สำนักพิมพ์ ส.ส.ท.
สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย-ญี่ปุ่น)

by... **Hirokazu Onoda**

แปลโดย... **ดร.อรรณพ เรืองวิเศษ**

ราคา 210 บาท

พิมพ์ครั้งที่ 1 ตุลาคม 2559

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ
โอโนดะ, ฮิโรกาซุ.
100 โจทย์คณิตสุดหินในประวัติศาสตร์.--กรุงเทพฯ : สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย-ญี่ปุ่น), 2559.
208 หน้า.
1. คณิตศาสตร์--ข้อสอบและเฉลย. I. อรรณพ เรืองวิเศษ, ผู้แปล. II. ชื่อเรื่อง.
510.76
ISBN 978-974-443-677-1

จัดพิมพ์โดย **สำนักพิมพ์ ส.ส.ท.**
สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย-ญี่ปุ่น)
5-7 ซอยสุขุมวิท 29 ถนนสุขุมวิท แขวงคลองเตยเหนือ เขตวัฒนา กรุงเทพฯ 10110
โทร. 0-2258-0320 (6 เลขหมายอัตโนมัติ), 0-2259-9160 (10 เลขหมายอัตโนมัติ)
ติดต่อสำนักพิมพ์ book4u@tpa.or.th
ติดต่อสั่งซื้อหนังสือ www.tpabook.com

จัดจำหน่ายโดย **บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด (มหาชน)**
เลขที่ 1858/87-90 ถนนบางนา-ตราด แขวงบางนา เขตบางนา กรุงเทพฯ 10260
โทร. 0-2739-8000, 0-2739-8222 โทรสาร 0-2739-8356-9
www.se-ed.com

ส.ส.ท. รักษ์โลก
ร่วมใช้หมึกพิมพ์จากถั่วเหลือง

"ถ้าหนังสือมีข้อผิดพลาดเนื่องจากการพิมพ์ ให้นำมาแลกเปลี่ยนได้ที่สมาคมฯ" โทร. 0-2258-0320 ต่อ 1560, 1570

■ **บรรณาธิการบริหาร** สุกัญญา จารุการ **บรรณาธิการเล่ม** พรรณพิมล กิจไพฑูรย์ **กองบรรณาธิการ** แทนพร เลิศวุฒิภัทร, รินดา คันธวร, วัลภา ลีรัชดานนท์, แสงเงิน นาคพัฒน์, สุธินี เทียนกุล **ออกแบบปกและรูปเล่ม** ธารินี คุตตะสิงคี **ศิลปกรรม** ศิรินุช อิศรางกูร ณ อยุธยา, ประเทือง คชเสนีย์, ณัฐวัตร วิวาสุขุ **ธุรการสำนักพิมพ์** อังคณา อรรถพงศ์ธร
■ **พิมพ์ที่ :** ห้างหุ้นส่วนจำกัด ที.เอส.บี. โปรดักส์

คำถามที่ 5

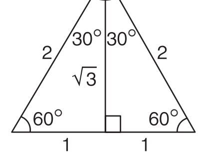
ปัญหาจากเกาะดีลอส (500 ปีก่อนคริสต์ศักราช)

ถ้าไม่นับโจทย์เตรียมความพร้อม ข้อนี้ถือเป็นโจทย์จริงข้อที่ 1 เพื่อไม่ให้เสียเวลาเรามาเริ่มด้วยโจทย์ที่ยากมากกันเลย จากหนังสือ “A History of Mathematics” ฉบับของบอยเยอร์ (C.B. Boyer) มีตำนานเล่าว่า ช่วงที่เกิดโรคระบาดบนเกาะดีลอส ชาวบ้านไปขอคำทำนายจากสถานที่ศักดิ์สิทธิ์แห่งเทพอพอลโล และได้รับคำตอบว่าให้ทำแท่นบูชารูปลูกบาศก์ซึ่งมีปริมาตรเป็น 2 เท่ามาถวาย และนี่เป็นที่มาของ “ปัญหาจากเกาะดีลอส” หนึ่งในโจทย์ใหญ่สามข้อที่ยากมากแห่งยุคกรีกโบราณ ซึ่งทั้งสามข้อไม่สามารถเขียนรูปเรขาคณิตได้โดยใช้เพียง “ไม้บรรทัดที่ไม่มีมาตราส่วนกับวงเวียน”

คำถามข้อนี้คือ จงเขียนรูปแสดงรากที่สามของ 2 (ด้วยความยาวของส่วนของเส้นตรง) ข้อนี้สามารถเขียนรูปได้โดยใช้ไม้บรรทัดที่มีมาตราส่วนกับวงเวียน ลองดูว่าคุณจะเขียนรูปนี้ได้ไหม

★ ข้อนี้เป็นหนึ่งในโจทย์ยากยุคโบราณที่มีชื่อเสียง จึงน่าเสียดายหากจะคิดเพียงไม่กี่นาทีแล้วถอดใจยอมแพ้ ขอให้ลองคิดดูอย่างน้อย 1 เดือน ถ้าหาคำตอบได้เองภายใน 1 เดือน คุณจะต้องเป็นอัจฉริยะแน่นอน

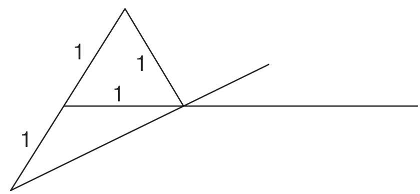
(เนื้อหาเสริมซึ่งอาจไม่จำเป็น) สามารถเขียนรูปแสดง $\sqrt{3}$ ได้ง่าย ๆ ดังรูปด้านขวา



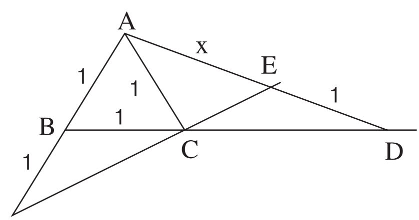
__หมายเหตุ :__ “รากที่สามของ 2” หรือ $\sqrt[3]{2}$ คือจำนวนที่เมื่อนำมายกกำลังสามแล้วได้ผลลัพธ์เป็น 2 ซึ่งมีค่าประมาณ 1.259921

คำตอบที่ 5

เริ่มด้วยการเขียนรูปดังนี้



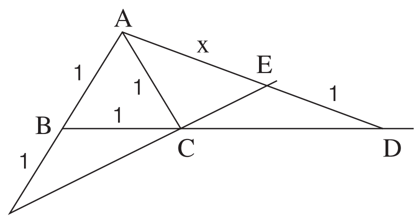
จากนั้นลากเส้นตรงอีก 1 เส้นจาก A ไปยัง D โดยให้ DE มีความยาว 1 หน่วย ดังรูปข้างล่าง แล้วจะได้ความยาวของ AE เป็นรากที่สามของ 2 (ดูแล้วอาจจะยังไม่เข้าใจ ขอให้ทำต่อในข้อถัดไป)



คำถามที่ 6

ปัญหาจากเกาะดีลอส (ข้อที่ 2)

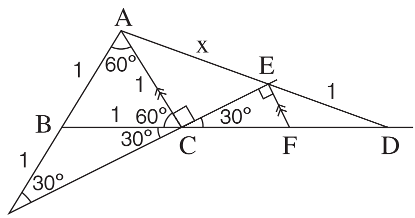
จากคำอธิบายในข้อที่ผ่านมา ค่าของ x ในรูปข้างล่างคือ $\sqrt[3]{2}$ (รากที่สามของ 2) ว่าแต่สามารถแสดงให้เห็นได้หรือไม่ว่า $x = \sqrt[3]{2}$ ได้อย่างไร



★ (เกร็ดความรู้) ค่า $\sqrt[3]{2}$ มีชื่อเรียกว่า “ค่าคงที่ดีลอส (Delian constant)”

คำตอบที่ 6

ลาก EF ให้ขนานกับ AC ดังรูปข้างล่าง



$\triangle DEF \sim \triangle DAC$ ดังนั้น EF : ED = AC : AD ($\sim$ เป็นสัญลักษณ์แสดงความคล้าย)

$$\therefore\ EF : 1 = 1 : (1 + x)$$

$$\therefore\ EF = \frac{1}{(1 + x)}$$

$\triangle CFE$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\angle C = 30^\circ$ ดังนั้น CE มีความยาวเป็น $\sqrt{3}$ เท่าของ EF (ดูหน้า 25 ประกอบ) จึงได้

$$CE = \frac{\sqrt{3}}{(1 + x)}$$

$\triangle ACE$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้นจากทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{1 + x}\right)^2 + 1^2 = x^2$$

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$$

$$(x + 2)(x^3 - 2) = 0$$

$$\therefore\ x = -2 \text{ หรือ } x^3 = 2$$

เนื่องจาก x เป็นจำนวนที่มีค่าบวก สุดท้ายแล้วจึงได้ $x = \sqrt[3]{2}$ (รากที่สามของ 2)

คำถามที่ 22

ค่า π

ด้วยการหาความยาวเส้นรอบรูปของรูป 96 เหลี่ยมด้านเท่าที่แนบในวงกลม และรูป 96 เหลี่ยมที่ล้อมรอบวงกลม อาร์คิมิดีสได้แสดงให้เห็นว่า ค่า π จะอยู่ระหว่างช่วง

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

คราวนี้มาลองหาคำตอบที่ง่ายกว่านั้น โดยการแก้โจทย์ข้างล่างนี้กัน

จงพิสูจน์ว่าอัตราส่วนของความยาวเส้นรอบวงต่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง (π) มีค่ามากกว่า 3.05 (ข้อสอบคัดเลือกเข้ามหาวิทยาลัยโตเกียว ค.ศ. 2003)

เรื่องน่ารู้

อริสตาร์คัส (Aristarchus)

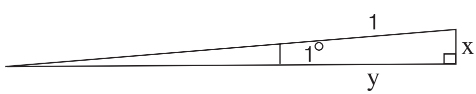
อริสตาร์คัส (ประมาณ 310–230 ปีก่อนคริสต์ศักราช) เป็นผู้ที่มีชื่อเสียงเปรียบเสมือนโคเปอร์นิคัสแห่งยุคโบราณ เขาได้กล่าวไว้ว่า “ดาวฤกษ์ต่าง ๆ และดวงอาทิตย์อยู่นิ่งไม่เคลื่อนที่ ส่วนโลกโคจรไปบนเส้นรอบวงของดวงอาทิตย์ โดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงโคจร”

นอกจากนี้อริสตาร์คัสยังได้คำนวณค่าต่าง ๆ ไว้ด้วย ไม่ว่าจะเป็นระยะทางจากโลกไปยังดวงอาทิตย์ รวมถึงขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของดวงอาทิตย์

ผลจากการคำนวณเหล่านั้น จึงนำไปสู่การคำนวณค่าในโจทย์ข้อถัดไป สำหรับค่าของ x และ y ที่กำหนดในรูปข้างล่าง (เพื่อให้แสดงรายละเอียดของรูปได้จึงเขียนรูปมุม 1° เป็นมุมที่ค่อนข้างใหญ่) จะได้ว่า

$$\frac{1}{60} < x < \frac{1}{45}$$

$$\frac{89}{90} < y < 1$$



(ทั้งนี้ค่าที่แม่นยำกว่าคือ $x \approx \frac{1}{57.2987}$ และ $y \approx \frac{89.9863}{90}$)

คำถามที่
27

อสมการของอริสตาร์คัส (ประมาณ 260 ปีก่อนคริสต์ศักราช)

อริสตาร์คัสได้แสดงให้เห็นว่า ค่าของ x ในรูปข้างล่างนี้มีค่าอยู่ระหว่าง

$$\frac{1}{20} < x < \frac{1}{18}$$

อริสตาร์คัสหาค่านี้ก็เพื่อคำนวณหาระยะทางจากโลกไปยังดวงอาทิตย์

แล้วคุณสามารถพิสูจน์อสมการนี้ได้ไหม

(แต่ห้ามใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพราะอย่าลืมว่าโจทย์ในหนังสือเล่มนี้สามารถหาคำตอบได้ด้วยความรู้คณิตศาสตร์ระดับมัธยมต้นเท่านั้น)

★ โจทย์ข้อนี้น่าจะเป็นปริศนาที่สร้างความสนุกในการขบคิดได้มาก ดังนั้นขอให้ลองคิดดูสัก 1 วันเต็ม ๆ

คำถามที่
63

โจทย์จาก "หนังสือทฤษฎีจำนวน" ของฟีโบนัชชี

ข้อนี้เป็นโจทย์ที่มีชื่อเสียงซึ่งเขียนไว้ใน *"หนังสือทฤษฎีจำนวน (Liber Quadratorum)"* เมื่อปี ค.ศ. 1225 โจทย์มีอยู่ว่า

กำลังสองของจำนวนซึ่งไม่ว่าจะบวกด้วย 5 หรือลบด้วย 5 แต่ละกรณีจะได้เป็นกำลังสองของจำนวนตรรกยะ —— จงหาจำนวนตรรกยะที่เป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าว

ทั้งนี้หาได้ 1 คำตอบก็ถือว่าใช้ได้แล้ว